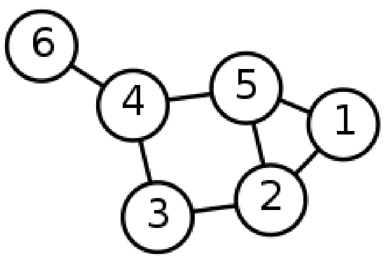
Les Graphes

Notions de base sur les graphes

Les graphes sont des modèles abstraits de dessins de réseaux reliant des objets. La théorie des graphes est une discipline mathématique et informatique.

Les graphes sont constitués par la donnée de sommets (ou nœuds) reliés par des d'arêtes. Ces arêtes sont parfois non-symétriques (les graphes sont alors dits orientés) et sont appelés des flèches.

Les algorithmes élaborés pour résoudre des problèmes liés aux graphes ont des applications dans les réseaux (réseau social, réseau informatique, télécommunications, etc.) et dans bien d'autres domaines (par exemple la génétique).

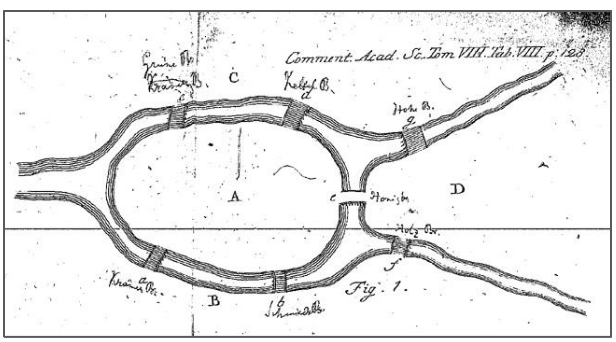


Graphe avec 6 sommets et 7 arêtes

*Le nombre de liens reliant un sommet est le **degré** du sommet.*
Le sommet 6 est de degré 1
Les sommets 1 et 3 sont de degré 2
Les sommets 2, 4 et 5 sont de degré 3

Un peu d'histoire

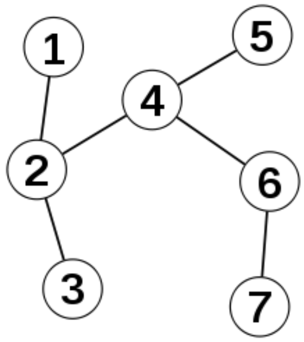
On accorde au mathématicien suisse **Leonhard Euler** l'origine de la théorie des graphes. En 1735, Euler à posé le **problème des sept ponts de Königsberg**, schématisé ci-dessous.



Le problème consistait à trouver une promenade à partir d'un point donné qui fasse revenir à ce point en passant une fois et une seule par chacun des sept ponts de la ville de Königsberg. Euler avait conjecturé que ce n'était possible dans un graphe que si chaque sommet avait un nombre pair d'arêtes. La preuve en a été apportée 130 ans plus tard par le mathématicien allemand **Carl Hierholzer**.

Les arbres

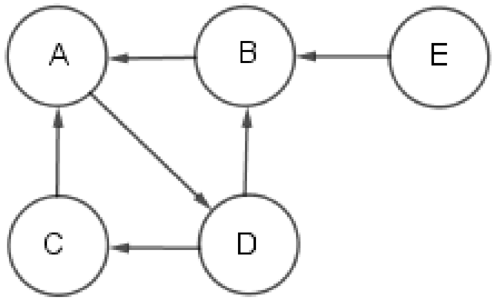
Au milieu du XIXe siècle, le mathématicien britannique **Arthur Cayley** s'intéressa aux **arbres**, qui sont un type particulier de graphe n'ayant pas de cycle, dans lequel il est impossible de revenir à un point de départ sans faire le chemin inverse.



Arbre avec 7 sommets et 6 arêtes

On distingue 2 types de sommets dans les arbres :
*Les **feuilles** qui sont les sommets de degré 1*
*Les **sommets internes** dont le degré est supérieur à 1*
Dans l'arbre ci-contre, les feuilles sont les sommets 1, 3, 5 et 7.

Graphes orientes

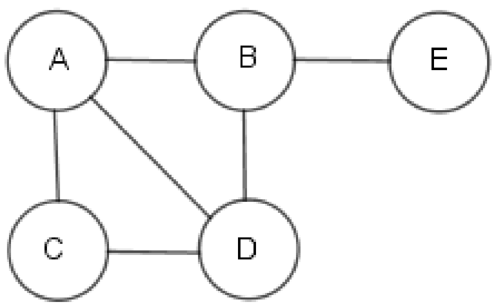


Dans les graphes orientés, les chemins possibles (B vers A par exemple) sont représentés par des **flèches**. Les couples de sommets aux extrémités d'un chemin sont appelés les **arcs**.

Pour le graphe orienté ci-contre l'ensemble des arcs est :

$$E = \{(A;D), (B;A), (C;A), (D;B), (D;C), (E;B)\}$$

Graphes non orientes



Dans les graphes non orientés, les chemins possibles sont symétriques (de A vers B et de B vers A, par exemple). Les paires de sommets aux extrémités d'un chemin sont appelés les **arêtes**.

Pour le graphe non orienté ci-contre l'ensemble des arêtes est :

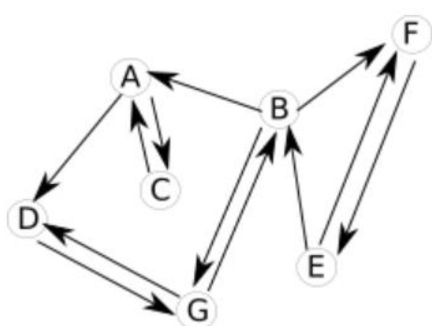
$$E = \{AD, BA, CA, DB, DC, EB\}$$

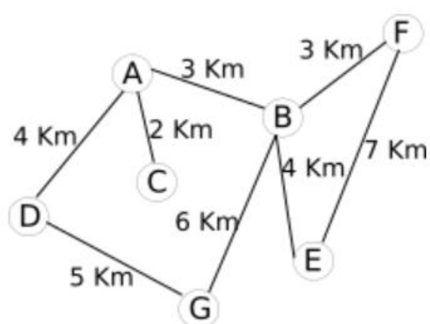
Plus formellement on dira qu'un graphe G est un couple $G = (V, E)$ avec V un ensemble de sommets et E un ensemble d'arêtes (ou d'arcs).

Graphes ponderes

On associe parfois aux arêtes ou aux arcs des valeurs, on parle alors de graphes pondérés.

Par exemple pour une cartographie, il est possible d'associer à chaque arête la distance entre les 2 lieux :





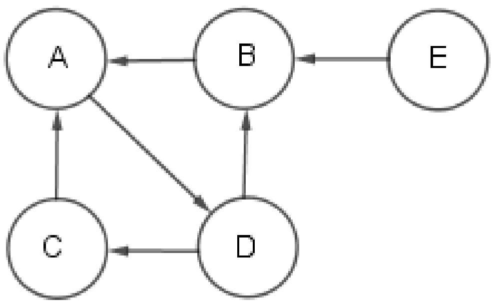
L'algorithme permettant de déterminer le chemin le plus court entre 2 points travaillera sur le graphe orienté pondéré.

REPRESENTATION DES GRAPHES

Deux structures permettent de représenter les graphes : les **matrice d'adjacence** et les **listes d’adjacence**.

MATRICE D’ADJACENCE

Tout graphe $G = (V, E)$ peut être représenté par une matrice. Les relations d'adjacences (si deux sommets sont reliés par une arête ou une flèche ils sont adjacents) sont représentées par la matrice d'adjacence.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Construction d’une matrice d'adjacence pour un graphe orienté :

A chaque ligne correspond un sommet du graphe et à chaque colonne correspond aussi un sommet du graphe.

Il y a une flèche entre A et D.
Il y a une flèche entre B et A.
Il y a une flèche entre C et A.
Il y une flèche entre D et B et entre D et C.
Il y a une flèche entre E et B.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On procède de la même manière pour un graphe non orienté.

On peut utiliser les matrices d'adjacence en Python avec des tableaux de tableaux (chaque ligne du tableau contient un tableau) :

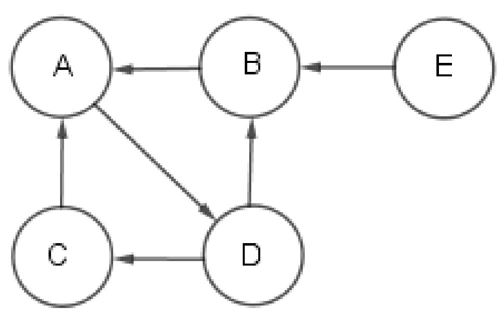
```
m = [[0,0,0,1,0],[1,0,0,0,0],[1,0,0,0,0],[0,1,1,0,0],[0,1,1,0,0]]
```

LISTES D’ADJACENCE

Les listes d’adjacences d’un graphe est un tableau qui contient les listes des voisins de chaque sommet.

A	prédécesseurs de	D
B	prédécesseurs de	A
C	prédécesseurs de	A
D	prédécesseurs de	B, C
E	prédécesseurs de	B

A	successeur de	B, C
B	successeur de	E, D
C	successeur de	D
D	successeur de	A



On peut travailler les listes d'adjacences en Python en utilisant les dictionnaires.

```
L1 = {'A':('D'), 'B':('A'), 'C':('A'), 'D':('B', 'C'), 'E':('B')}
L2 = {'A':('B', 'C'), 'B':('E', 'D'), 'C':('D'), 'D':('A')}
```